La nouvelle géométrie de Francesco Patrizi da Cherso

Thomas de Vittori

La nouvelle géométrie de Francesco Patrizi da Cherso

Thomas de Vittori *

2010

Résumé

Dans son *De spacio physico et mathematico*, Francesco Patrizi da Cherso (1529-1597) propose une refonte de la philosophie naturelle dans laquelle l'espace devient le premier concept. Annoncée dans ce premier texte, les conséquences de cette mutation sur ce que doit être la géométrie sont importantes et Patrizi propose dans la *Nuova Geometria* une réécriture complète des principes de cette discipline. Dévéloppées principalement dans les premiers livres autour de réflexions sur le point et la ligne, les thèses proposées par Patrizi sont représentatives des changements épistémologiques ayant permis le passage d'une géométrie vue comme science des figures dans l'espace à une science de l'espace.

Mots clés : géométrie, espace, lieu, Patrizi, Renaissance

*Univ Lille Nord de France F-59 000 LILLE, FRANCE UArtois, Laboratoire de Mathématiques de Lens EA 2462, Fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR 2956, Faculté des Sciences Jean Perrin, Rue Jean Souvraz, S.P. 18, F-62 300 LENS, FRANCE

Introduction

Francesco Patrizi da Cherso [1] est une figure bien connue des historiens de la philosophie. Né en 1529 sur l'île de Cres en Croatie, Francesco Patrizi fait ses études, d'abord dans sa ville natale, puis à Venise et à Ingolstadt en Autriche, pour finalement entrer à l'université de Padoue en 1547. Il entame alors un cursus de philosophie qu'il complète par de nombreux voyages en Italie, mais aussi à Chypre et en Espagne. En 1578, il obtient un poste à l'université de Ferrare où il enseigne la philosophie. Finalement, il est invité en 1592 à l'université de Rome où il termine sa carrière. Francesco Patrizi meurt à Rome en 1597. Traducteur de Proclus, Philopon ou encore Aristote, Patrizi est résolument anti-aristotélicien et son système philosophique s'ancre dans un platonisme rigoureux. Dans des écrits principalement en latin mais aussi en italien, Patrizi questionne l'organisation de la cité, l'histoire, la rhétorique ou encore la poétique. L'ensemble trouve en partie son achèvement dans sa dernière œuvre, la *Nova de Universis Philosophia*. Auteur incontournable de la Renaissance italienne, ses travaux sont loin d'être ignorés et le rôle de ses théories l'espace dans la constitution des fondements de ce qui deviendra la physique mathématique est, depuis quelques décenniess, clairement établi [2]. Mais, hormis pour quelques historiens comme Sommerville qui le classe parmi les précurseurs de la géométrie non-euclidienne [3], ce lettré n'est que très rarement considéré pour son travail mathématique. Patrizi consacre pourtant une section entière de son *Nova de universis philosophia* à la question des fondements de la géométrie. Ce texte en latin, appelé aussi *Pancosmia*, concerne la mise en place d'une théorie de l'espace qui assure à ce dernier sa primauté sur tout autre principe. Les conséquences sur le plan mathématique de cette posture conceptuelle entraînent Patrizi vers une redéfinition de la géométrie. Le texte du *Pancosmia* est repris dans le *De spacio physico et mathematico*, un traité indépendant dans lequel il fait référence à un ouvrage en italien intitulé *Della nuova geometria*. Ce dernier traité, présenté dans ce qui va

1. Francesco Patrizi da Cherso est connu sous divers autres noms dont Patricius, Patritius, Patrici, Patrizzi, Franciscus, de Petris, ou encore en croate Petriš, Petrić ou Patrišević. Pour une biographie et une présentation des principales thèses de Francesco Patrizi da Cherso, voir l'article *Francesco Patrizi* de la *Stanford Encyclopedia of Phylosophy*, consultable en ligne à l'adresse plato.stanford.edu/entries/patrizi/

2. L'article de Henry J. [4] expose de manière très complète la théorie de l'espace chez Patrizi ainsi que ses conséquences sur la pensée du 17e siècle en Occident

3. Sommerville D.M.Y., *Bibliography of non-euclidean geometry* [18]

suivre, montre que bien qu'il ne soit pas un mathématicien, les théories de Francesco Patrizi intéressent l'histoire de cette discipline.

1 La théorie du lieu et de l'espace selon Patrizi

La première partie du *De spacio physico et mathematico* est consacrée à la mise en place des idées de l'auteur sur l'espace et le lieu à travers une critique des théories aristotéliciennes. Pour Patrizi, l'espace *est* et ceci est montré par le simple fait que nous percevons les *dimensions*, les *distances* ou encore les *intervalles*. Cette évidence étant la base de toute la discussion, Patrizi invite celui qui ne la partagerait pas à, tout simplement, ne « pas lire ce qui suit » et il affirme dès lors que « l'espace - et les distances - [qui dans l'homme s'étend de la tête aux pieds] est au nombre des êtres et il est quelque chose. »

À partir de l'acceptation de son existence, Patrizi précise la signification du terme *espace*. Selon les « Anciens », il y a trois formes d'espace : « la longueur ou la ligne, la largeur ou la superficie, la profondeur qui jointe aux deux premières est dénommée corps. » S'il ne critique pas cette typologie, Patrizi précise toutefois que la surface et le solide ne sauraient être antérieurs à la ligne car ils sont produits à partir de celle-ci. Cette remarque n'entame en rien la distinction traditionnelle entre le corps sensible, comportant grandeur, figure et résistance (impénétrabilité) et le solide mathématique dépourvu d'antitypie, mais elle sera importante lors de la discussion sur le lieu. Pour notre auteur, « dans les corps singuliers, quels qu'ils soient, qu'ils soient mathématiques ou naturels, on trouve trois espaces qui sont perçus par l'esprit et par les sens » mais, s'il y a bien des distances dans les corps, l'espace demeure antérieur comme le montrera ensuite la réflexion sur le lieu. La question qui se pose alors est la suivante : « y a-t-il un autre espace que celui qui se trouve dans les corps singuliers ? » Pour Patrizi cette interrogation est légitime car, comme il le souligne, « longueur, largeur et profondeur ont été attribuées aussi au lieu. » La principale difficulté relevée par Patrizi dans la théorie aristotélicienne du lieu comme « superficie du corps enveloppant » est qu'il devrait être bidimensionnel. Or le corps localisé possédant les trois dimensions, le lieu doit pouvoir en rendre compte. Pour Patrizi, les dimensions spatiales sont engendrées à partir de la ligne en allant de l'unidimensionnel au tridimensionnel. De ce fait, la superficie, ne possédant pas, par définition, la troisième dimension, elle ne saurait être le lieu d'un corps.

La démonstration de Patrizi est géométrique et rappelle que, pour lui, cette discipline est la mère de toutes les sciences. La fin de la discussion sur le lieu s'organise autour du problème du mouvement. Il s'agit cette fois de savoir si le lieu demeure lorsque le corps se meut. Pour Patrizi, la distinction entre le lieu, conçu comme immobile, et le corps localisé en mouvement est surtout l'occasion de préciser les rapports entre le lieu et l'espace. Le lieu n'est pas le corps, mais il possède les trois dimensions dans lesquelles s'insère le corps localisé.

> Un tel espace à trois dimensions est le lieu véritable ; il est différent du localisé, immobile en soi et égal de tous côtés au corps localisé. Donc le lieu a un espace propre différent de l'espace appartenant au corps [4].

Patrizi distingue ici deux espaces, l'un pour le lieu, l'autre pour le corps. Pour que le corps soit localisé, il faut que les dimensions du lieu soient égales à celle du corps. Pour l'élaboration de ses propres théories, au-delà de l'adéquation entre le lieu et l'espace, c'est surtout l'antériorité de l'espace par rapport aux corps qui intéresse Patrizi. Certes « le lieu n'est rien d'autre que ces dimensions, et l'espace est le lieu véritable et le lieu est le véritable espace », mais surtout, « le lieu est par nature avant tous les corps, comme le corps et avant toutes les choses corporelles. » Patrizi aborde alors le problème du vide. L'argumentation s'organise autour de trois questions : existe-t-il un espace englobant l'univers et s'étendant au-delà ? existe-t-il un petit espace vide dans la monde ? et existe-t-il entre les corps des espaces minima vides ? Sur le premier point, Patrizi rejoint les idées de ses prédécesseurs en refusant à l'espace d'être un vide infini mais il ne développe pas davantage l'argumentation. Les deux autres questions font par contre l'objet d'une étude plus conséquente. Concernant l'existence de petits vides entre les corps, Patrizi reprend des éléments d'une conception atomiste du monde. Par exemple, le fait que l'air puisse se contracter prouve l'existence d'interstices autour des particules d'air, car sinon, il y aurait pénétration des corps, ce qui est impossible. Notons que Patrizi fait le même raisonnement avec de l'eau en ajoutant deux quantités A et B d'eau dans un même volume. Or il ne peut s'agir ici que d'une expérience de pensée car l'eau est incompressible. De même, Patrizi annonce que la glace a un volume moindre que l'eau (c'est de l'eau contractée), or c'est le contraire. L'argumentation est faible mais les idées avancées sont d'une importance capitale pour la compréhension de la suite

4. Patrizi F., *De spacio physico et mathematico*, [16] p.44

de la démarche de l'auteur. La conclusion à laquelle arrive Patrizi est que, non seulement des minima de vide existent mais qu'ils doivent être en aussi grand nombre que les corps, ainsi « le vide se trouve dans le monde en quantité égale au plein. » La dernière question concerne la possibilité d'espaces vides de taille macroscopique. Là encore, Patrizi propose des expériences, comme vider une sphère métallique creuse de son air, pour démontrer l'existence d'espaces vides *plus grands*. Les autres expériences proposées reposent comme précédemment sur la compressibilité de l'eau et sont donc moins pertinentes. Cette partie se termine sur un dernier exemple où Patrizi propose de prendre une outre pleine d'eau et d'en vider le contenu. Une fois refermée, on demande que soit déployé le ventre de l'outre. Pour le philosophe, l'espace intérieur deviendra plus grand alors que rien n'est entré, ni air, ni eau. Ainsi, l'espace à l'intérieur sera un *grand* vide. Il est clair que l'intérêt de ces expériences n'est pas intrinsèque mais réside dans le fait qu'elles proposent une critique des théories aristotéliciennes et qu'*in fine*, elles cherchent à rendre compte d'une autre définition du lieu.

À la suite de ces démonstrations sur les petits vides, Patrizi revient au problème de l'espace vide. Comme il l'a annoncé au début, le lieu de l'Univers, son espace, n'est pas le vide, mais ceci n'implique pas qu'on ne puisse pas trouver d'autres espaces vides. En effet, si on imagine que le monde tout entier se meut, alors « il remplira nécessairement cet espace vide et en lui se donnera le lieu. » L'espace qui *accueille* l'Univers ne contient au départ aucun corps, il s'agit d'un « espace vide. » Pour Patrizi la conclusion est claire, il existe un espace vide hors du monde qui, comme il le souligne, « n'est pas le lieu, mais il devient lieu dans notre pensée, et peut-être un jour, il sera réellement lieu. »

Venons-en maintenant à un point crucial de la théorie du lieu chez Patrizi. D'après tout ce qui précède, il y a deux espaces : l'un dans le monde, l'autre hors du monde. Ne s'agirait-il pas, en fait, d'un seul et même espace ? Pour répondre, Patrizi commence par redonner les caractéristiques communes desdits espaces :

> Aucun des deux espaces n'est un corps : l'un et l'autre sont aptes à recevoir les corps ; ils cèdent tous deux devant les corps ; ils ont tous deux trois dimensions ; ils peuvent tous deux pénétrer les dimensions des corps [5].

S'ils diffèrent quant à leur finitude, et leur contenu, l'un étant fini et plein,

5. [16] p.52

l'autre infini et vide, les deux espaces sont pourtant de même nature. Dans les deux cas, par l'absence de résistance et pénétrabilité dimensionnelle, ils permettent à la fois le mouvement des corps et leur localisation. À propos du vide, Patrizi rappelle que l'espace du monde est « divisé par les petits intervalles de vide qui se trouvent entre les corps. » Comme il l'a démontré précédemment, les petits intervalles vides sont aussi nombreux et de même taille que les espaces pleins et donc dire que l'espace est plein ou vide n'est, en quelque sorte, qu'une convention. De plus, comme il localise les corps, l'espace pénètre ceux-ci sans en être affecté, de sorte que la distinction entre l'espace intramondain vide et l'espace intramondain plein n'est pas nécessairement fondée. Pour Patrizi, les « lieux sont antérieurs aux corps. » Mais le lieu n'est qu'une partie de l'espace et donc, l'espace est antérieur au lieu. Patrizi conclut alors :

> Par sa nature l'espace précède le monde et il est premier par rapport à toutes les choses du monde. Avant lui rien n'a existé après lui tout a existé [6].

La fin de cette première partie du *De spacio* est consacrée à la nature de l'espace, car puisqu'il *est*, il demeure une question : *qu'est-il* ? Dans ce passage, Patrizi reprend des thèses platoniciennes quant au rôle de l'espace pour la détermination des corps sur lesquelles nous ne arrêterons pas. Par contre, à la fin de ce texte, l'auteur montre que l'espace est tout à fait sans mouvement : il est « totalement immobile. » Il y a donc affirmation de l'existence d'un espace absolu dans lequel se meuvent les corps.

2 De l'espace mathématique

La principale nouveauté de l'œuvre de Patrizi est l'analyse des conséquences de la modification des théories de l'espace sur la géométrie. La deuxième partie du *De spacio physico et mathematico* est spécifiquement consacré à l'espace géométrique. L'espace, Patrizi l'a montré, est infini et il est donc infiniment grand. En tant que maximum absolu, l'espace doit posséder la propriété de divisibilité. En fait, pour Patrizi, il est même « divisible au plus haut point. » Mais pour l'auteur, ce n'est pas à ce propos que se situent les difficultés. L'espace étant le maximum divisible, par le principe du contraire, il doit exister un minimum indivisible. Selon les géomètres, l'in-

6. [16] p.54

divisible est le point, mais il n'est pas « de l'espace » et il n'a donc aucune dimension. Le point est certes un minimum *dans l'espace*, mais il n'est pas le minimum *d'espace*. Pour contredire à la fois ceux qui feraient du point l'équivalent de l'instant mais aussi pour nier la possibilité à celui-ci d'engendrer la ligne par mouvement, Patrizi propose l'organisation suivante :

> Le temps est à la fois avant et après le mouvement. Le mouvement est après et avec les corps ; les corps après les dimensions. La troisième après les deux dimensions ; les deux après la première. La première après le point.
>
> Donc le point est avant tout cela parce qu'il est placé dans l'espace, lequel est avant tout [7].

Bien que situé au début des notions géométriques, le point reste postérieur à l'espace. À l'aide de cette organisation des notions, Patrizi va pouvoir redéfinir la ligne. La ligne n'est pas la trace du mouvement d'un point, car le mouvement est postérieur, à la fois, au point et à la ligne. Pour Patrizi, la ligne résulte de la considération simultanée de deux points. Avec deux points, on conçoit l'espace qui les sépare et donc la ligne. Cela étant, les superficies proviendront de la donnée de trois points et les solides de quatre, non-coplanaires. Patrizi explique ensuite que l'espace compris entre cinq points, six points ou plus, ne détermine « rien d'autre que des corps. » Cette limitation tridimensionnelle est classique mais Patrizi en trouve la justification dans l'arithmétique pythagoricienne car « le trois inclus tout et pour cela il est parfait. »

> Puisqu'on considère que les êtres mathématiques se trouvent dans un espace infini, et puisque celui-ci est en acte, il est nécessaire aussi qu'ils soient infinis et en acte. Ceci, les Anciens ne l'ont pas bien su, ne l'ont pas nié tout à fait ni rapporté clairement [8].

Après un bref rappel des résultats obtenus sur la possibilité du point, de la ligne, etc. c'est par cette citation que s'ouvre le deuxième chapitre du *De spacio mathematico*. Cette partie, sous-titrée *Des erreurs des anciens* portent pour l'essentiel sur la question du continu et de l'infini. Acceptant plus ou moins les idées selon lesquelles, il existe une infinité de points, la ligne et le nombre peuvent être augmentés à l'infini, l'objectif de Patrizi est avant tout de montrer que la ligne, limitée par deux points, peut être

7. [16] p.60
8. [16] p.61

indéfiniment divisible. Dans le contexte établi par Patrizi, il apparaît une difficulté majeure lors de la division d'un continu. En effet, si l'extrémité d'une ligne est le point, il devrait être possible de reconstituer un continu en joignant les deux parties d'une division. Or, pour Patrizi, le point ne peut en aucun cas produire du continu, donc lorsque les extrémités s'unissent, il reste le point et d'une certaine manière, la *coupure* aussi. L'argumentation de Patrizi est essentiellement de nature logique. Certaines notions n'étant pas définies, on ne doit pas les utiliser.

> Et, de fait, la ligne est une certaine grandeur, mais elle n'est composée de rien d'autre. Elle n'est pas composée de points, ce que lui-même nie aussi, à moins qu'on ait dit, d'aventure et à juste titre, qu'une longue ligne est composée de plus petites lignes. Mais ces petites lignes sont des lignes et elles sont continues elles aussi [9].

La ligne n'est pas composée de points car elle est « une réalité absolument simple. » S'il est possible de diviser une ligne, formée d'un ensemble de petites lignes, un nombre fini de fois, ceci n'autorise en rien la réitération de ce procédé à l'infini. La cible de Patrizi est ici autant les philosophes qui n'ont jamais prouvé la divisibilité du continu que les géomètres qui l'utilisent sans plus de justification. Contre ces derniers, l'auteur reprend des paradoxes usuels concernant l'infini comme le fait qu'il y ait autant de point dans un segment que dans son double. Il y a là une contradiction pour le mathématicien car un serait égal à deux. Ou encore, si on admet qu'il y a autant de points dans le segment et dans les deux moitiés de son double, un infini serait plus grand qu'un autre, ce qui est contraire à la définition de l'infini comme ce qui est plus grand que tout.

Tous les arguments de ces prédécesseurs ayant été rejetés, Patrizi peut avancer sa propre théorie de l'espace géométrique.

> Rien n'empêche, parce qu'il y a des lignes insécables et minima, qu'une définition ne convienne pour la ligne en général, les droites et les courbes en particulier [10].

La clé du raisonnement se situe dans l'existence de lignes minimales. Ces lignes sont des minima d'espace à partir desquels tout le continu se construit. La ligne minimale est aussi la plus courte distance entre deux points, c'est

9. [16] p.63
10. [16] p.65

donc une droite. Les figures planes sont alors conçues à partir de cet élément premier par découpage et recollement. Par exemple, on peut construire un triangle minimum ou un carré minimum. De même, on construira les solides à partir d'un tétraèdre primitif. Patrizi fait alors une remarque importante : « Et si dans un minimum isocèle il n'est pas possible qu'une perpendiculaire minima divise la base, ce n'est pas pour cela la ruine de la géométrie. » L'objection est effectivement pertinente. Patrizi ne s'explique pas davantage sur ce point, mais cette citation prend un autre sens lorsque, argumentant contre la confusion entre le point et le minimum d'espace, il la complète en annonçant que « puisqu'une droite minima est donnée, que soit donnée une ligne minima circulaire. » Ainsi, contrairement à ce que pouvait laisser croire le début de la discussion, les minima d'espace ne sont pas nécessairement tous de même espèce. Non pas qu'à chaque forme géométrique, il y ait un type de minimum d'espace adapté, mais que les minima d'espace sont antérieurs aux figures et donc à la géométrie. Comme il le précisera ensuite, le minimum d'espace et ce qu'il nomme la grandeur minima sont en fait une même chose. Pour Patrizi, l'impossibilité d'accéder à ces minima avec nos sens ne doit pas surprendre puisque ni « l'espace total primordial, ni aucune de ses parties, grande ou petite, n'est perçue par les sens. » Seule la raison peut concevoir à la fois l'espace vide et infini, et les minima d'espace continus et indivisibles. Pour Patrizi, « il est clair aussi que le continu, par sa nature, est antérieur et plus ancien que toute division. » Les théories de Patrizi, dont nous venons de voir les conséquences sur la définition des objets géométriques, obligent aussi une organisation particulière des différentes branches des mathématiques.

> Puisque l'espace est antérieur à toutes les choses de la nature, il est évident que l'une et l'autre science, celle qui s'occupe du continu et celle qui s'occupe du discret, sont avant la matière.
> ...
> Il s'en suit que la mathématique est antérieure à la philosophie naturelle[11].

Dans ce texte, Patrizi franchit deux pas importants. D'une part, et comme cela a été remarqué par les historiens des sciences, il met en place l'antériorité de la géométrie sur la physique. L'espace étant premier, l'étude de la nature doit se faire d'abord *via* la géométrie. Nous connaissons bien la postérité d'une telle idée tant chez les scientifiques de la Renaissance qu'au 17^{e} siècle. Mais l'autre apport du travail de Patrizi, qui a peut-être été minoré

11. [16] p.67

ou ignoré, est la mise en avant de la géométrie comme science *de l'espace*. Tout ce qui précède permet de redéfinir les objets de la géométrie et, par là, la discipline elle-même. La « science de l'espace » comme il l'appelle ensuite n'a rien de commun avec la géométrie d'Euclide. Chez Patrizi, la géométrie s'occupe de certaines notions qui lui sont propres comme « les positions, les contacts, les figures, les grandeurs des lignes, des surfaces et des corps. » Sur le plan théorique, la présence de la position et des contacts parmi les domaines de recherche du géomètre, montre que nous sommes résolument passés à une géométrie portant autant sur les relations entre les figures que sur leurs configurations ou leurs propriétés métriques.

Le *De spacio physico et mathematico* est un traité théorique sur l'espace, mais il annonce aussi un programme qui n'est rien de moins qu'une réforme complète de la géométrie. Francesco Patrizi termine ainsi :

> De là vient que cette assertion apparaît fausse qui prétend que les mathématiques n'ont ni but, ni utilité. Voici ce qu'on peut dire sur l'espace mathématique et les mathématiques grâce à certaines notions communes à tous. Les livres que nous avons publiés, en italien, sur la géométrie nouvelle, suivent ceux-ci [12].

3 La nouvelle géométrie

La géométrie nouvelle annoncée par Patrizi apparaît dans plusieurs écrits dont le troisième volume de son *Pancosmia*. Cette ouvrage, en latin, est en fait un résumé des résultats principaux du *Della nuova geometria*. Ce texte sur la nouvelle géométrie comprend quinze livres qui s'organisent de manière à rendre compte de la construction théorique voulue par l'auteur. Les deux premiers livres concernent le point et les points, les livres III à IX et XI à XIV traitent de la ligne, de la ligne droite et des droites, le livre X porte sur l'angle et enfin le livre XV est l'application de tout ce qui précède à la construction du triangle. Malgré sa ressemblance, certainement voulue, avec les *Éléments*, le *Della nuova geometria* n'est pas un ouvrage de géométrie ordinaire. Comme il l'annonçait dans le *De spacio mathematico*, Patrizi cherche à fonder une géométrie sur des principes qui soient philosophiquement démontrés et non simplement postulés, ou pire, admis implicitement. Ainsi, dans sa nouvelle géométrie on ne trouvera pas de nouveaux résultats,

12. [16] p.69

propositions ou théorèmes, mais une explicitation des fondements de cette discipline.

Des quinze livres qui composent le *Della nuova geometria*, le premier est certainement le plus important car c'est là que Patrizi fait le lien entre ses réflexions philosophiques sur l'espace et la reconstruction de la géométrie. Après une courte introduction, le livre I s'ouvre sur des rappels des résultats du *De spacio*, puis viennent les définitions et les axiomes. L'ouvrage comprend ensuite dix-neuf propositions, avec une synthèse entre les propositions XVI et XVII, et se termine par une conclusion qui comprend également une petite synthèse.

L'introduction et les rappels

Dès les premières lignes du *Del punto Lib.I*, Patrizi annonce la nouveauté de son approche en expliquant que rien de ce qu'ont pu faire les Anciens n'est suffisant pour définir la science du point. Toujours selon notre auteur, la Science se fait selon trois modes, soit par la définition des essences, soit par la démonstration des propriétés essentielles, soit enfin par la déduction à partir des causes. Cette énonciation des différentes formes de la Science n'a pas pour but d'être critiquée, mais permet d'introduire la problématique principale du livre. Patrizi trouve chez Euclide, dans sa définition du point, l'exemple même du premier genre de Science. Dans les *Éléments*, le point est ce qui n'a pas de parties, et Euclide s'arrête à cette seule définition. Pour Patrizi, cette affirmation ne permet en rien de définir le point et surtout, cela ne permet pas de justifier le choix d'une telle définition. L'objet de l'ouvrage est alors annoncé clairement lorsque l'auteur explique : « Mais nous, procédant par d'autres voies, nous démontrerons la propriété du point de ne pas avoir de partie, ainsi que beaucoup d'autres. » Fondamentalement, il y a dans le projet de Patrizi une inversion de l'ordre d'exposition des concepts de la géométrie. Alors que dans les *Éléments*, Euclide pose le point comme premier objet de la géométrie [13], Patrizi voit la nécessité de placer un autre concept avant. Il s'agit bien entendu de l'espace. Dans le *Della nuova geometria*, le philosophe ne va pas exposer une nouvelle fois ce qu'il a écrit dans le *De spacio*, il se contente d'un rappel des principaux résultats.

13. On notera que, chez Euclide, la suite du texte des *Éléments* montre que le point ne sert pas à fonder cette discipline, toutefois il reste le premier objet dans l'ordre d'exposition.

> I. Les Mathématiques tout entières, principales et subalternes, ne s'abstraient pas des choses naturelles, ni ne sont dans l'imagination, ni en Diane, mais procèdent de l'espace en général [14].

Comme il l'a démontré dans ses précédents ouvrages, la notion fondamentale des mathématiques est l'espace. Dès lors, tout va se produire dans cet espace et en particulier, les objets de la géométrie vont y prendre place.

> II. La Géométrie considère le point, la ligne, l'angle, la surface et le corps. Et ceci est leur ordre naturel [15].

Les définitions du point, de la ligne, ... n'interviennent pas à ce moment de l'exposé. Patrizi pose simplement les termes et leur organisation. L'objectif du *Della nuova geometria* n'est pas de concevoir une discipline sans lien avec la géométrie euclidienne, mais d'assurer à cette dernière de véritables fondements. Patrizi ne redéfinit pas l'espace, il l'a fait auparavant dans le *De spacio*, mais il résume ses principales caractéristiques.

> III. L'espace est l'étendue, et l'étendue est l'espace.
> IV. Tout espace est, ou minimal, ou maximal, ou médian, ou encore moyen.
> V. Tout espace est ou long, ou long et large, ou long, large et profond [16].

C'est par les trois propriétés ci-dessus que se terminent les rappels. La supposition III réaffirme l'unicité de l'espace. Pour Patrizi, il n'y a pas à distinguer entre un espace pour les corps et un espace abstrait. L'espace est à la fois corporel et incorporel, il est consubstantiel à toute chose et toute chose est dans l'espace. Ainsi, tant pour la physique que pour les mathématiques, l'espace est et doit être le même car il leur est antérieur. La quatrième supposition assure aux parties de l'espace la possibilité d'être comparées. Il s'agit tout simplement de l'affirmation de l'existence d'un ordre, au sens ici de l'inclusion. Quant à la cinquième et dernière supposition, elle assure la tridimensionnalité de l'espace et la possibilité d'y concevoir des sous-espaces de dimension 1 ou 2.

14. Patrizi F., *Della nuova geometria, Libri XV, Ferrara, 1587*, [13] f.2
15. [13] f.2
16. [13] f.2-3

Les définitions et les axiomes

Après l'évocation de ses thèses sur l'espace, Patrizi entreprend l'explicitation des termes qu'il a précédemment employés. En effet, si l'on s'autorise une lecture moderne des premières lignes du *Del punto*, on peut voir que Patrizi commence par se donner un espace abstrait, qu'il muni ensuite d'une structure par l'existence d'objets (le point, la ligne, l'angle, la surface et le corps), d'une notion d'ordre et d'une idée de la dimension. Mais à ce stade, il ne s'agit que de concepts généraux qui doivent être explicités.

> Définitions
> I. L'espace minimal est celui dont il n'y a pas d'espace moindre.
> II. L'espace maximal est celui dont il n'y a pas d'espace plus grand.
> III. L'espace moyen est celui dont il y a un espace plus grand, plus petit et égal [17].

Les trois premières définitions ont pour but d'expliquer la notion d'ordre portant sur les parties de l'espace. Patrizi reprend une formulation de type euclidienne et l'applique aux espaces. L'idée est de borner toute forme d'extension à l'infini que ce soit vers l'infiniment petit comme vers l'infiniment grand. Cette précaution permet, dans le cadre de la géométrie, de ne pas avoir à s'occuper de la divisibilité à l'infini et du lieu du tout, ces deux questions ayant été rejetées par Patrizi dans le *De spacio*. Ceci étant, il est désormais possible de concevoir des espaces compris entre ces bornes ; c'est-à-dire ceux qu'il nomme « moyens ». Par ce procédé, l'espace qui était sans propriété au départ, se trouve doté de quelque chose qui s'apparente à une topologie.

> IV. Le point est le minimum dans l'espace.
> V. La ligne est un espace long, ou longueur.
> VI. L'angle est un espace ouvert en long et en large.
> VII. La surface est un espace fermé long et large.
> VIII. Le corps est un espace long, large et profond [18].

Dans les définitions IV à VIII, Patrizi s'attache aux objets de la géométrie tels qu'il les a définis dans les suppositions. Le point est le minimum *dans* l'espace, mais il est distinct du minimum d'espace. Comme il l'a démontré dans ses réflexions sur l'espace, le point n'est pas un espace, donc il ne peut être un espace minimum. Pour Patrizi, le point est un objet dans l'espace, mais il

17. [13] f.3
18. [13] f.3

n'est pas non plus un corps, il est simplement premier parmi les figures de la géométrie. D'une certaine manière, il reprend l'idée pythagoricienne d'un point comme ayant uniquement un position. Le point est donc juste ce qui n'a pas d'étendue, contrairement aux autres objets de la géométrie comme la ligne, l'angle, la surface ou le corps qui eux sont étendus dans l'espace. Les définitions de Patrizi posent clairement les lignes, surfaces, et les corps comme des sous-espaces de dimension respectivement 1, 2 et 3. En tant que tels, ces sous-espaces sont également des espaces qui entrent de plein droit dans le cadre déterminé par les trois premières définitions.

Reprenant une présentation très euclidienne, Patrizi fait suivre ses définitions d'axiomes. Il en propose six.

> Axiomes
> I. Premier est celui qui précède tout autre selon son ordre.
> II. Tout est celui qui a des parties.
> III. Chaque tout se divise en parties.
> IV. Chaque partie est moindre que le tout.
> V. Chaque quantité peut se diviser, ou encore est divisible.
> VI. Chaque divisible est également divisible[19].

Excepté le premier, ce groupe d'axiome permet d'affirmer la continuité de l'espace géométrique. Dans le *De spacio*, Patrizi s'était attaché à faire de l'espace le premier des principes. Ce faisant, il rendait ce dernier absolu et indivisible. Pour permettre la géométrie, il faut pourtant que les lignes ou plus généralement les figures soient divisibles. Pour Patrizi, le continu est toujours en acte et est totalement indivisible, la « division peut seulement être imaginée. » Une fois encore, il faut bien voir que la géométrie ne se situe pas au même niveau que la philosophie naturelle et donc qu'elle n'en partage pas nécessairement les même principes.

Les suppositions, les définitions et les axiomes ainsi énoncés permettent la mise en place des propositions concernant le point. Le livre I comprend dix-neuf propositions qui se séparent en deux groupes. Les propositions I à XVI constituent un premier ensemble qui vise à montrer que le point n'est pas un espace et ceci pour nier tout antériorité possible du point sur l'espace. Ce résultat théorique important fait l'objet d'une synthèse avant un deuxième groupe de propositions qui concerne le point en tant qu'objet *dans* l'espace. La forme des démonstrations de Patrizi est identique durant tout l'ouvrage. Il s'agit de déductions logiques qui, partant de la négation de la propriété à dé-

19. [13] f.3-4

montrer et en utilisant uniquement les suppositions, définitions ou axiomes, aboutissent à une contradiction. Une utilisation intuitive du tiers exclu permet alors de conclure. Pour illustrer notre propos, reprenons simplement la première proposition.

> Proposition I
> Le point, parce qu'il est le minimum dans l'espace, est aussi le premier dans l'espace [20].

La démonstration se déroule ensuite suivant trois étapes qui sont toujours les mêmes dans les preuves que propose Patrizi et qui s'appuient sur le schéma déductif évoqué précédemment.

> Démonstration
> Si le point, qui est le minimum dans l'espace, n'était pas le premier dans l'espace, alors avant le minimum, il y en aurait un autre moindre.
> Mais du point, qui est un minimum, il n'y a pas de chose moindre.
> Donc, parce qu'il est le minimum dans l'espace, le point est aussi le premier dans l'espace [21].

Comme on peut le voir, cette démonstration utilise à la fois la définition IV (le point est le minimum dans l'espace) et l'axiome I (premier est celui, qui précède tout autre dans son ordre) afin de prouver que le point est premier dans l'espace. Les quinze propositions suivantes, construites sur le même modèles, mènent au résultat recherché par Patrizi, à savoir le fait qu'un point ne saurait être un espace.

> Conclusion sur les principes
> Le point n'est mesuré par aucune grandeur.
> Et ceci, parce qu'il n'est d'aucune grandeur la mesure.
> Et ceci, parce qu'il n'est commensurable avec aucune grandeur.
> Et ceci, parce qu'il ne se compare à aucune grandeur.
> Et ceci, parce qu'il ne se compare à aucune chose qui peut être égale.
> Et ceci, parce qu'il ne peut être égalé à elle.
> Et ceci, parce qu'il ne peut être plus grand.
> Et ceci, parce qu'il ne peut être plus petit.
> Et ceci, parce qu'il n'est pas une grandeur.

20. [13] f.4
21. [13] f.4

Et ceci, parce qu'il n'est pas divisible.
Et ceci, parce qu'il n'est pas partissible.
Et ceci, parce qu'il n'a pas de parties.
Et ceci, parce qu'il n'est pas un tout.
Et ceci, parce qu'il est indivisible.
Et ceci, parce qu'il est simple.
Et ceci, parce qu'il est premier dans l'espace.
Et ceci, parce qu'il est minimum dans l'espace.
Ce qui est la définition de son essence [22].

Dans de cette longue suite, qui se présente suivant un ordre inversé par rapport à l'ordre d'exposition des propositions dans l'ouvrage, on peut remarquer la présence de la définition euclidienne du point. Patrizi veut fonder la géométrie et de ce fait prouver ce qu'Euclide a admis. Ainsi, dans la proposition V, il montre que « parce qu'il n'est pas un tout, le point n'a pas de parties », et il peut donc affirmer qu'il a « non pas supposé, mais prouvé la définition du point donnée et supposée chez Euclide. »

La première série de résultats permet de déterminer clairement le statut du point dans la *nouvelle géométrie*. La construction de cet édifice peut dès lors se poursuivre avec l'étude du point en tant qu'il est *dans* l'espace. Cette partie du traité est l'occasion pour Patrizi de faire fonctionner sa théorie du lieu sur le premier objet de la géométrie et d'infléchir la définition de cette discipline vers des aspects relationnels. Comme précédemment, les propositions XVII à XIX sont suivies d'une conclusion qui revient sur les résultats principaux.

Conclusion
Le point est en relation avec un ou plusieurs autres points, ou lignes, ou angles, ou surfaces, ou corps, qui sont dans l'espace.
Parce qu'il a une situation dans l'espace.
Et ceci parce qu'il a un lieu dans l'espace.
Et ceci parce qu'il est dans l'espace.
Ce qui faisait partie de la définition de son essence [23].

Comme tout objet *dans* l'espace, le point a un lieu. Pour Patrizi, l'existence d'un lieu pour un objet implique nécessairement pour ce dernier d'être situé. Cette situation n'est rien d'autre que la possibilité d'établir des relations avec d'autres objets *mathématiques* dans un espace lui aussi *mathématique*. Ainsi,

22. [13] f.13-14
23. [13] f.16

non seulement Patrizi place l'espace comme principe premier de la géométrie, mais il en fait indirectement son objet d'étude. La *nouvelle géométrie* est donc autant une science des figures *dans* l'espace, comme il l'annonçait dans les premières lignes de l'ouvrage, qu'une science *de* l'espace. Dans le livre I, Patrizi ne détaille pas la nature des relations entres les points, cette question fait l'objet du livre suivant.

Plusieurs points dans l'espace : le livre II

Dans le livre I, Patrizi a montré que le point est le minimum dans l'espace. Le point, qui n'a pas de partie comme il le démontre ensuite, est situé dans l'espace. L'espace est vide, infini, et les points se situent dans cette extension. À la fin du premier livre, Patrizi précise finalement qu'un point, parce qu'il est situé dans l'espace, doit posséder des relations avec les autres points. Le livre II s'ouvre justement sur la considération de deux ou plusieurs points dans l'espace. Afin de poursuivre son élaboration théorique, Francesco Patrizi propose d'étudier successivement les deux alternatives suivantes : soit les points se touchent, ce dont traite le livre II, soit ils ne se touchent pas, ce cas faisant l'objet du livre III.

Le livre II est assez court. Il comprend 11 propositions et se termine comme toujours chez Patrizi par une conclusion qui résume les résultats obtenus. Dans ce traité, seul le cas de points situés dans l'espace et se touchant est considéré.

> PROPOSITION I
> Deux ou plusieurs points placés dans l'espace, se touchant entre eux, n'occupent pas d'espace.

Dans la première proposition, Patrizi montre que deux points se touchant, même pris ensemble, n'occupent pas d'espace. La démonstration suit le schéma commun à l'ensemble de la *Nuova Geometria*. Patrizi procède par un raisonnement par l'absurde.

> DÉMONSTRATION
> S'ils occupaient un espace, ils ne seraient pas un minimum, mais une quantité.
> Mais, par la définition du point, le point est un minimum, et il a été démontré qu'il n'est pas une quantité.
> Donc, deux ou plusieurs points placés dans l'espace, se touchant entre eux, n'occupent pas d'espace.

Pour cette première proposition du livre II, Patrizi s'appuie à la fois sur définition du point comme minimum dans l'espace et sur le fait que le point n'est pas une quantité, ce qui n'est rien d'autre que la conclusion du Livre I. Avec ce premier résultat, s'annonce aussi le projet du début du Livre II, à savoir l'étude du rapport entre l'espace et plusieurs points en contact dans l'espace.

> Proposition II
> Deux, ou plusieurs points placés dans l'espace, et se touchant (entre eux), parce qu'il n'occupent pas d'espace, n'occuperont pas d'espace plus grand qu'un seul point.

La proposition II affirme que l'espace occupé par plusieurs points collés les uns aux autres n'est pas plus grand que celui d'un seul point. Ceci peut sembler redondant avec la première proposition mais il n'en est rien. En effet, le point et l'espace ne sont pas de même nature. L'espace est antérieur au point, il est même antérieur à la géométrie. Le point n'est pas fait d'espace, il est simplement dans l'espace. La première proposition rappelle cette distinction et la définition du point comme minimum. Toutefois, en se référant aux seules considérations logiques, plusieurs points se touchant pourraient engendrer autre chose. Ce que nous pourrions nommer un agglomérat de points est ce que rejette Patrizi avec ces deux premières propositions. Il est clair que ce qui est visé, c'est la définition du continu à partir du point et les difficultés importantes qu'elle peut engendrer. Dans la suite du texte, l'auteur vient confirmer cet objectif en ajoutant un corollaire dans lequel il explique que « la même démonstration se fera sur autant de points qu'on veut, et ce fussent-ils infini. » De cette manière, le point reste limité à sa fonction première à savoir celle d'être le minimum dans l'espace. Plusieurs points se touchant n'occupant pas d'espace, il s'agit donc d'un minimum qui ne peut être que le point lui-même.

Dans les propositions III, IV et V, Patrizi montre successivement que les points se touchant ne s'étendent pas dans l'espace, n'acquièrent pas de grandeur et ne créent pas de grandeur. La première propriété est une fois encore la distinction entre être dans l'espace et être étendu. Dans le cas des points, ceux-ci sont dans l'espace et ne sont pas étendus. Pour l'étendue, Patrizi a montré dans le *De Spacio* qu'il existe un minimum d'étendue qui diffère du point et qui lui est antérieur. Les propositions IV et V, qui affirment que les points n'acquièrent pas et ne créent d'étendue, sont des conséquences de cette distinction. La première est évidente. La seconde, présentée ici comme déduite de la première en est en quelque sorte la réciproque. Les points ne sont pas de l'espace, et il fallait donc montrer d'une part qu'ils n'acquièrent pas la propriété d'être étendu mais aussi que ce ne sont pas eux qui la produisent. Dans les propositions VI à XI, Patrizi envisage successivement les différentes dimensions que sont la ligne, l'angle, la surface et le solide. Les points ne créant pas de grandeur, ils n'engendreront pas non plus de longueur, largeur ou profondeur. En particulier, à la suite de la proposition VII, Patrizi est en mesure d'annoncer qu'il a prouvé que la ligne n'est pas composée de point, chose que, selon lui, les anciens n'avaient pas fait.

La définition de la droite : le livre III

Après avoir précisé, dans le livre II, ce que la ligne n'est pas, Patrizi va donner sa propre définition de cet objet. Comme les précédents, le livre III s'ouvre sur le constat de l'absence de résultats pertinents chez les anciens géomètres. Ce que propose Patrizi va s'organiser autour du deuxième cas de la situation de deux ou plusieurs points dans l'espace, à savoir des points placés dans l'espace et ne se touchant pas. Les 32 propositions de ce livre III se décomposent en deux grands groupes. Le premier comprend les 17 premières propositions et porte sur la définition de la ligne minimale et ses conséquences sur la continuité. Le second groupe, constitué des 15 propositions suivantes, concerne la nature des extrémités de la ligne et l'existence de lignes plus grandes que la ligne minimale.

Dans les trois premières propositions, Patrizi commence par faire la transition entre ce qu'il vient de démontrer au livre II sur l'unicité de nature entre les points, et l'existence d'un autre type d'objet géométrique.

> Proposition I
> Deux points placés dans l'espace, ne se touchant pas, comprennent entre eux un espace qui est un espace de l'un à l'autre.
> Proposition II
> Deux points placés dans l'espace, ne se touchant pas, parce qu'ils comprennent un espace entre eux, cet espace ne sera pas un point.
> Proposition III
> Deux points placés dans l'espace et ne se touchant pas, parce qu'ils comprennent un espace qui n'est pas un point, [cet] espace peut être minimum, et maximum, et moyen.

Pour Patrizi, la coexistence de deux points dans l'espace permet de déterminer l'existence d'un espace entre eux. Dans le texte de Patrizi, comme toujours, la démonstration se fait par l'absurde en remarquant que s'il n'y avait pas d'espace entre les deux points, ils se toucheraient, ce qui est exclu par hypothèse pour tout le livre III. À la suite du livre II, Patrizi montre que l'espace compris entre les deux points n'est pas un point. Ceci est justifié par le fait qu'un point n'est pas un espace et cette différence de nature suffit à l'exclure des candidats possibles. Donc, deux points situés dans l'espace et ne se touchant permettent de définir un nouvel objet, qui peut être soit minimum, soit maximum, soit moyen car rien pour le moment n'impose de contrainte. Patrizi commence par étudier le cas où cet espace entre les deux points est minimum. Dans les propositions IV à X, Patrizi explique que cet espace minimum est aussi premier, simple, donc non composé. Comme il n'est pas composé, il n'est pas non plus composé de parties, il n'est donc pas partissible et donc il est indivisible. La conclusion à la dixième proposition est que l'espace minimum entre deux points ne se touchant pas n'est autre qu'une longueur. Ceci renvoie à la quatrième supposition du livre I dans laquelle la longueur est définie comme le premier type d'étendue spatiale.

> Proposition XI
> Deux points placés dans l'espace et ne se touchant pas, parce qu'ils peuvent comprendre un espace premier et long, cet espace sera une ligne.
> Proposition XII
> Deux points placés dans l'espace et ne se touchant pas, parce qu'ils peuvent comprendre une ligne, un espace long, premier et minimum, cet espace sera une ligne minimale.

L'objectif de Patrizi est une fois encore de bien distinguer l'espace des autres objets géométriques et en particulier du point. L'espace minimal entre deux points est une ligne, elle aussi minimale. Outre sa continuité, la principale caractéristique de cette ligne minimale est de ne pas être divisible. Dans les propositions XIII à XVII, Patrizi montre que cette indivisibilité de la ligne élémentaire se transmet à l'ensemble des lignes qu'elle que soit leur taille. La proposition XVII dit très explicitement que les « lignes minimales, moyennes et maximales, parce qu'elles ne sont pas divisibles à l'infini, aucune ligne se sera divisible à l'infini. »

L'un des objectifs avouées de la *Nuova Geometria* est d'expliciter ou de redéfinir la géométrie des anciens, et en particulier celle d'Euclide. Patrizi résume donc à la fin de la démonstration de cette proposition XVII les conséquences de ces premières propositions.

> [...]
>
> Donc aucune ligne n'est divisible à l'infini.
>
> Donc faux était l'ancien dogme disant que toute ligne est divisible à l'infini. Bien au contraire, notre dogme (disant) qu'aucune ligne n'est divisible à l'infini est vrai. Par celui-ci cesseront la contemplation dans l'abstrait, le calcul dans le concret, toutes les absurdités, et les impossibilités que l'ancien dogme impliquait.

L'antériorité de l'espace sur tout autre concept permet à Patrizi de repenser les liens entre les points et les lignes. Dans le livre II, il avait montré que la ligne n'est pas composée de points, il y ajoute maintenant l'impossibilité d'une division à l'infini. Le continu est un attribut de l'espace qu'il ne transmet qu'à ses propres parties. La ligne minimale en est une. Cette ligne minimale est déterminée par l'espace minimal existant entre deux points. D'une certaine manière, l'espace de Francesco Patrizi est quantique. La continuité procède d'objets élémentaires, comme la ligne minimale, et va permettre de définir la géométrie. Pour saisir la portée des thèses de Patrizi, il est donc indispensable de toujours garder à l'esprit cette antériorité stricte de l'espace sur la géométrie. Dans le cas des lignes minimales, comme il l'avait déjà annoncé dans le *De spacio*, leur organisation dépasse la géométrie et va au-delà même de notre imagination. Cela étant, la *Nuova Geometria* doit pouvoir rendre compte des objets usuels de la géométrie euclidienne. Le cas du points ayant été traité, il reste à montrer comment des lignes de différentes tailles peuvent exister est à déterminer les liens structurels entre la ligne, la ligne minimale et le point. Ce programme est précisément l'objet du deuxième groupe de propositions dans le livre III.

À partir de la proposition XVIII, Patrizi illustre certains de ses propos à l'aide de figures. Ce qui précède montre qu'il est parfaitement en droit de le faire maintenant. Auparavant, l'utilisation de figures géométriques n'aurait reposée sur aucun fondement théorique. Dans les propositions XVIII et XIX, Patrizi commence par établir les liens entre la ligne et les points en tant qu'objets géométriques.

> Proposition XVIII
>
> Deux points placés dans l'espace et ne se touchant pas, parce l'espace compris entre eux est une ligne, touchent la ligne des deux côtés.
>
> Proposition XIX

> Deux points dans l'espace ne se touchant pas, parce qu'ils touchent la ligne des deux côtés, deviendront ses extrémités.

« Les extrémités d'une ligne sont des points » et ainsi que le précise l'auteur, il démontre ici ce qui était supposé par Euclide. Chez Patrizi, les liens dimensionnels entre les objets géométriques ne sont pas déduits d'une perception intuitive de leurs pendants sensibles. Ceci est parfaitement cohérent avec l'ensemble de la démarche de Patrizi qui place l'espace avant la géométrie mais également avant l'Univers sensible. Les points ne sont pas les limites de la ligne parce qu'on perçoit qu'ils en forment les extrémités ; ils le sont par les liens structurels qui existent entre les éléments placés dans l'espace. En plus d'être les extrémités, les points constituent aussi ce qui rend la ligne finie. C'est ce que démontre Patrizi dans les propositions XXI et XXII. La ligne est terminée, finie, limitée des deux côtés. Mais cette finitude n'exclut pas la possibilité d'être prolongé. En fait, la ligne peut être prolongée des deux côtés aussi loin que l'on veut (propositions XXIII à XXV). Ainsi, Patrizi démontre ce « qu'Euclide et les autres avaient demandé et qui leur était concédé » à savoir que la ligne peut se prolonger à l'infini. Nous pouvons remarquer que la question de la possibilité d'étendre à l'infini une ligne ne pose pas de difficultés dans le système théorique de Patrizi. Pour lui, l'espace est infini et est même infini en acte. Il peut donc contenir des objets géométriques potentiellement infinis. Les propositions précédentes permettent de montrer que la ligne peut être allonger comme on le veut, mais il ne s'agit pour le moment que d'une propriété, un attribut de la ligne. Il reste à Patrizi à montrer que des lignes de différentes longueurs existent effectivement dans l'espace. Pour ce faire, il va appliquer la propriété d'extensibilité dans le cas de la ligne minimale. Comme l'infini, le continu est toujours en acte chez Patrizi et la ligne minimale est un représentant de ce caractère essentiel à la géométrie. Dans les propositions XXVI à XXXII, le philosophe montre que parce que cette ligne minimale est aussi une ligne, elle pourra se prolonger pour devenir plus grande qu'elle même. Elle devient ainsi une ligne moyenne qui elle-même peut encore s'allonger jusqu'à être aussi grande que l'on veut, voire devenir maximale. Ainsi, par transitivité, la ligne minimale permet à toute ligne, non seulement d'exister, mais aussi d'être continue. Dès lors, les deux principaux objets de la géométrie que sont le point et la ligne se trouvent clairement définis, et les liens entre-eux sont explicités. Comme pour les précédents livres, le troisième volume de la *Nuova Geometria* se termine par une conclusion qui rappelle les points importants de ce qui a été démontré. Nous trouvons ici deux conclusions correspondant aux deux sous parties du livre.

> Conclusion des XVII premières propositions
> Aucune ligne n'est divisible à l'infini.
> Et ceci parce que la maximale n'est pas divisible à l'infini.
> Et ceci parce que la moyenne n'est pas divisible à l'infini.
> Et ceci parce que la minimale n'est pas divisible à l'infini.
> Et ceci parce qu'elle n'est pas divisible.
> Et ceci parce qu'elle n'est pas partissible.
> Et ceci parce qu'elle n'est pas composée de parties.
> Et ceci parce qu'elle est simple.
> Et ceci parce qu'elle est première.
> Et ceci parce qu'elle est minimale.
>
> Conclusion des XVI propositions suivantes
> La ligne minimale peut toujours devenir plus grande.
> Et ceci parce qu'elle peut devenir maximale.
> Et ceci parce qu'elle peut d'une moyenne plus grande devenir égale et plus grande.
> Et ceci parce qu'elle peut d'une moyenne devenir plus grande.
> Et ceci parce qu'elle peut à une moyenne devenir égale.
> Et ceci parce qu'elle peut devenir plus grande qu'elle-même.
> Et ceci parce qu'elle peut devenir moyenne.
> Et ceci parce qu'elle peut s'allonger.
> Et ceci parce que la ligne peut s'allonger.
> Et ceci parce que la ligne peut s'allonger à l'infini.
> Et ceci parce qu'elle peut toujours s'allonger.
> Et ceci parce qu'elle peut s'allonger des deux côtés.
> Et ceci parce deux points extrêmes, la font finie des deux côtés.
> Et ceci parce qu'ils la font limitée des deux côtés.
> Et ceci parce qu'ils sont des deux côtés les limites.
> Et ceci parce qu'ils deviennent ses extrémités.
> Et ceci parce qu'ils la touchent des deux côtés.
> Et ceci parce qu'ils comprennent entre eux un espace qui est une ligne.

Et ceci parce qu'ils ne se touchent pas.
Fin

4 Diffusion des conceptions patriziennes sur l'espace géométrique

Comme le souligne J. Henry [24], les philosophes et savants du début du 17^{e} siècle considèrent généralement Patrizi comme l'un des plus grands penseurs de son époque. De même, lorsque Baillet [25] retrace la vie de Descartes, il évoque Patrizi comme le représentant majeur de l'anti-aristotélisme de ces années. Bruno, Bacon, Gassendi, Kepler, Leibniz, Mersenne, Newton, ... tous connaissent [26] les travaux du philosophe italien. Les idées de Patrizi, citées comme références ou discutées, constituent un passage obligé pour les savants de la fin du 16^{e} siècle et du début du 17^{e} siècle. L'influence de Patrizi, mais aussi de contemporains comme Jacopo Mazzoni, sur tous ces penseurs est indiscutable et leur rôle dans la mise en place, après Galilée [27], d'une nouvelle physique est bien connue [28]. Sur le plan purement mathématique, la situation

---

24. [4] p.566

25. « La *philosophie* ancienne, et particulièrement celle d' Aristote se trouvait alors rudement attaquée par François Patricius qui ne survécut que d'un an à la naissance de M. Descartes : et le chancelier Bacon jetait déjà les fondemens de la nouvelle philosophie. Les *mathematiques* se trouvaient en assez bon état entre les mains de ceux qui travaillaient alors à les perfectionner. La *géométrie* était assez heureusement cultivée par Clavius à Rome, mais mieux encore par Monsieur Viéte en France. L'*astronomie* par Tycho-Brahé et son disciple Kepler, par le landgrave de Hesse Guillaume, et ceux qui travaillaient sous lui, et par Galilée qui commençait à paraître. » BAILLET Adrien, *La vie de Monsieur Descartes* [1] p.10

26. Pour le détail des références, voir [4] p.567 notes 111 à 124

27. Jacopo MAZZONI (1548-1598), latinisé Jacobus Mazzonius, fut le mentor de Galilée à l'Université de Pise.

28. « Patrizi's influence on Gassendi is an important detail in the history of science. In a recent paper J. E. McGuire has stressed the influence of Gassendi on Isaac Newton » [4] p.569. Dans cet article, Henry relève également une citation de Voltaire : « On n'entre point ici dans le détail des preuves physiques réservées pour d'autres chapitres ; il suffit de remarquer qu'en tout ce qui regarde l'espace, la durée, les bornes du monde, Newton suivait les anciennes opinions de Démocrite, d'Épicure, et d'une foule de philosophes rectifiés par notre célèbre Gassendi. Newton a dit plusieurs fois à quelques Français qui vivent encore qu'il regardait Gassendi comme un esprit très juste et très sage, et qu'il faisait gloire d'être entièrement de son avis dans toutes les choses dont on vient de parler. » *Éléments de la philosophie de Newton*, fin du chapitre II de la première partie, consultable à l'adresse

est un peu différente. On ne trouve pas de références explicites aux ouvrages géométriques de Patrizi qui ont dû circulé au moins dans leur version résumé au chapitre *Pancosmia* du *Nova de universis philosophia*. Quelques décénies plus tard, la mutation épistémologique est néanmoins pleinement consommée. Pour ne prendre qu'un exemple, évoquons *L'introduction à la géométrie* [29] de Pascal. En 1657, Blaise Pascal compose un traité de géométrie élémentaire dont on connaît quelques fragments au travers de notes prises par Leibniz, sans doute lors de son passage à Paris entre 1672 et 1676. La particularité de ce traité est de faire apparaître la notion d'*espace* dans un ouvrage de géométrie.

> Principe 1. L'objet de la pure Géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur, largeur et profondeur, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes-là sont connus d'eux-mêmes [30].

Pascal fait d'emblée de la géométrie une science de l'espace. Fils de physicien et physicien lui-même, les thèses de Patrizi qui circulaient chez des savants comme Gassendi ont certainement contribué à l'acceptation de l'antériorité de l'espace sur tout autre concept géométrique. Déjà dans les discussions sur le vide [31], Pascal avait montré son attachement à l'idée d'espace indépendant des corps. Dans *L'introduction à la géométrie*, il reprend aussi la thématique du *lieu* dans un contexte géométrique.

> Le lieu est une chose dont l'espace a une partie qui est la même avec l'espace d'une autre chose.
> L'espace d'une chose est dont l'étendue est égale et semblable à celle de la chose ; et chaque partie de l'une de ces étendues est aperçue avec chaque partie de l'autre [32].

Chez Pascal, le lieu est une partie de l'espace égale à celle occupée par le corps. Comme le remarque Leibniz dans une note ajoutée à cet endroit, « on peut dire que le corps est dans l'espace. » Comme l'objet de la géométrie est l'espace, les lignes, les surfaces ou les solides géométriques ne sont rien d'autre

29. Une édition de ce texte se trouve dans J.Itard [7] p.280-283
30. [7], p.281
31. Voir [11]
32. [7], p.282

que des parties d'un espace abstrait et préexistant. L'inversion consistant à faire de l'espace le principe premier de la géométrie engendre nécessairement une refonte de la définition des objets. Les lignes, les surfaces et les corps géométriques sont dès lors définis à partir de cette notion première d'étendue abstraite en tant que parties *de* l'espace *dans* l'espace.

5 Conclusion

Par sa rigueur philosophique, la géométrie de Francesco Patrizi est déroutante mais c'est là aussi sa force. En plaçant l'espace en tête des concepts utiles aux géomètres, Patrizi ouvre la voie à une science dont les fondements sont clairement établis. Les textes philosophiques de Francesco Patrizi sont généralement rédigés en latin contrairement à la *La Nuova Geometria* a été volontairement écrite et publiée en italien. Patrizi, qui avant d'être philosophe a été aussi marchand de manuscrit en Espagne, éditeur et imprimeur, ne s'explique pas particulièrement sur ce choix mais comme l'ont souligné certains historiens[33], l'usage d'une langue vernaculaire ne saurait être anodin. Qu'il s'agisse d'un refus du passé, d'une symbolique d'un mode de pensée neuf, ou plus simplement la volonté d'une diffusion large, l'utilisation d'une langue commune pour la publication de la *Nuova Geometria* est aussi un témoignage d'une certaine époque. Certainement conscient mieux que quiconque des mutations dans la manière de penser les sciences à son époque, Patrizi en est le témoin, mais aussi et surtout l'un des instigateurs.

33. « L'outil le plus efficace contre l'immutabilité du texte sera l'emploi de plusieurs langues. Jusqu'en 1470, les textes sont transmis en Europe dans une langue : le latin. La Renaissance va permettre, notamment avec la Bible polyglotte, utiliser des langues nouvelles. Le lecteur est alors capable d'analyses philologiques distinctes qui prouvent qu'il n'y a plus d'immutabilité du sens. Au-delà, on constate que le neuf résulte de la possibilité d'une autonomie individuelle intellectuelle, ce qui permettra la Réforme et une réinterprétation du discours. Cette assignation du sens au lecteur engendre toute une labilité individuelle herméneutique. En 1637, Descartes nous invite bien dans son Discours de la méthode à penser du neuf à partir de la seule raison, mais en langue vernaculaire. Et penser dans une autre langue signifie penser autrement. », Michèle Clément, *La Renaissance ou avec quels outils peut-on prétendre penser neuf ?*, Dossier de l'Institut des Sciences de l'Homme (ISH), article en ligne : www.ish-lyon.cnrs.fr/commun/COMISH/DOSSIER22.html

Références

1. Baillet Adrien. *La vie de Monsieur Descartes.* Daniel Horthemels - Paris, 1691.
2. Brickman Benjamin. On physical space. *Journal of the History of Ideas*, 4(2) :224–245, Apr. 1943.
3. Deitz Luc. *Natural particulars, nature and the disciplines in Renaissance Europe*, chapter Space, light, and soul in Francesco Patrizi's Nova de universis philosophia, pages 139–169. MIT Press, 2000.
4. Henry John. Francesco Patrizi da Cherso's concept of space and its later influence. *Annals of Science*, 36 :549–575, 1979.
5. Henry John. *Late Medieval and Early Modern Corpuscular Matter Theories*, chapter Void space, mathematical realism, and Francesco Patrizi da Cherso's use of atomism arguments, pages 133–161. Brill, 2001.
6. Hilbert David. *Les fondements de la géométrie.* Dunod, 1971, 1993.
7. Itard Jean. *Essais d'histoire des mathématiques.* Albert Blanchard, 1984.
8. Jammer Max. *Concepts of space. The history of theories of space in physics.* Dover, 1957, 1993.
9. Kristeller Paul Oscar. *Eight philosophers of the italian renaissance.* Stanford University Press, 1964.
10. Leibniz Gottfried Wilhelm. *La caractéristique géométrique.* VRIN, 1995.
11. Mazauric Simone. *Gassendi, Pascal et le querelle du vide.* PUF, 1998.
12. Pascal Blaise. *Lettres (sur le vide, au P.Noël, à M.Le Pailleur, aux Roannez,...).* texte numérisé, Association des Bibliophiles Universels, abu.cnam.fr, 1647 à 1660.
13. Patrizi Francesco. *Della nuova geometria, Libri XV, Ferrara, 1587.* texte numérisé, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, libcoll.mpiwg-berlin.mpg.de, 1587.
14. Patrizi Francesco. *Della nuova geometria, Libri XV, Ferrara, 1587.* texte numérisé, Bibliothèque Nationale de France, gallica.bnf.fr, 1587.

15. PATRIZI Francesco. *Pancosmia, Libri XV, Ferrara, 1591.* texte numérisé, Croatian Academy of Sciences and Arts, www.hazu.hr/patrizi/, 1591.

16. PATRIZI Francesco. *De spacio physico et mathematico, Ferrara, 1587, Trad.* VÉDRINE H. Vrin, 1996.

17. RASHED Roshdi. *Les mathématiques infinitésimales du 9e au 11e siècle, vol.IV, Ibn al-Haytham, Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques.* Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002.

18. SOMMERVILLE D.M.Y. *Bibliography of non-euclidean geometry.* Chelsea Publishing Compagny, 1911, 1970.

19. VASOLI Cesare. Francesco patrizi e la cultura filosofica ferrarese del suo tempo. In *La Corte di Ferrara e il suo mecenatismo*, 1987.